الموضوع: 16/2

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n . \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

ملاحظة 1: إذا كانت السلسلة المثلثية (التابعية) أعلاه متقاربة بانتظام فإن الإشارة (~) تتحول إلى مساواة (=) ; عندما يكون f مستمر.

ملاحظة 2: -1- إذا كان f تابع زوجي [وهو تابع دوري ودوره 2π].
فإن $b_n = 0$ حيث $n = 1, 2, ...$
فإن سلسلة فورييه للتابع f تحوي جيوب التمام أي:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$; $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) . \cos(nx) dx$

-2- إذا كان f تابع فردي فإن $a_n = 0$, $a_0 = 0$ حيث $n = 1, 2, ...$
فإن سلسلة فورييه تحوي فقط على الجيوب وبالتالي:

$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n . \sin(nx)$$

مثال: أوجد سلسلة فورييه للتابع f الدوري ودوره 2π والمعطى بالشكل:

$f(x) = |x|$ $\qquad \forall x \in [-\pi, \pi]$

الحل:

$$f(x) = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن التابع f هو تابع زوجي وهو تابع دوري ودوره 2π وبالتالي فإن:

$b_n = 0$; $n = 1, 2, ...$

لنوجد:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi$$

Scanned by CamScanner

الموضوع:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos(nx)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos(nx)\, dx$$

تكامل بالتجزئة

$u = x \Rightarrow du = 1$

$dv = \cos(nx) \Rightarrow v = \frac{1}{n} \sin(nx)$

$$= \frac{2}{\pi}\left[[u \cdot v]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{1}{n} \sin(nx)}_{v} \underbrace{dx}_{du} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{x \cdot \sin x}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \sin(nx)\, dx \right]$$

$= 0$

$$= -\frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi} \left[\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi} \left[(-1)^n - 1\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 & , n \text{ زوجي} \\ \frac{-4}{(2n-1)^2 \pi} & , n \text{ فردي } n \to 2k-1 \end{cases}$$

لتمييز أنه فردي

وبالتالي فإن سلسلة فورييه للتابع f هي:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \cdot \cos((2k-1)x)$$

$$\sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}$$

بما أن السلسلة التابعية الناتجة متقاربة على $\mathbb{R}$ [ذلك بسبب اختبار فايرشتراس].

$$\left| \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} \right| \le \frac{1}{(2k-1)^2} \quad ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$\sum$

و $\sum \frac{1}{(2k-1)^2}$ سلسلة عددية متقاربة.

وبالتالي:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$

يصبح:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} \quad , \forall x \in [-\pi, \pi]$$

* استنتج مجموع السلسلة $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$

نعوض $x=0$ نحصل على:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

---

4 تقارب سلسلة فورييه:

مبرهنة ديرخليه: (إصدار أول)

ليكن f تابع معرف على $\mathbb{R}$ دوري ودوره 2π وليكن (نقاط الانقطاع للتابع f من النوع الأول)

① f مستمر على مجالات جزئية من المجال $[-\pi, \pi]$.

② f مطرد على المجالات جزئية من المجال $[-\pi, \pi]$.

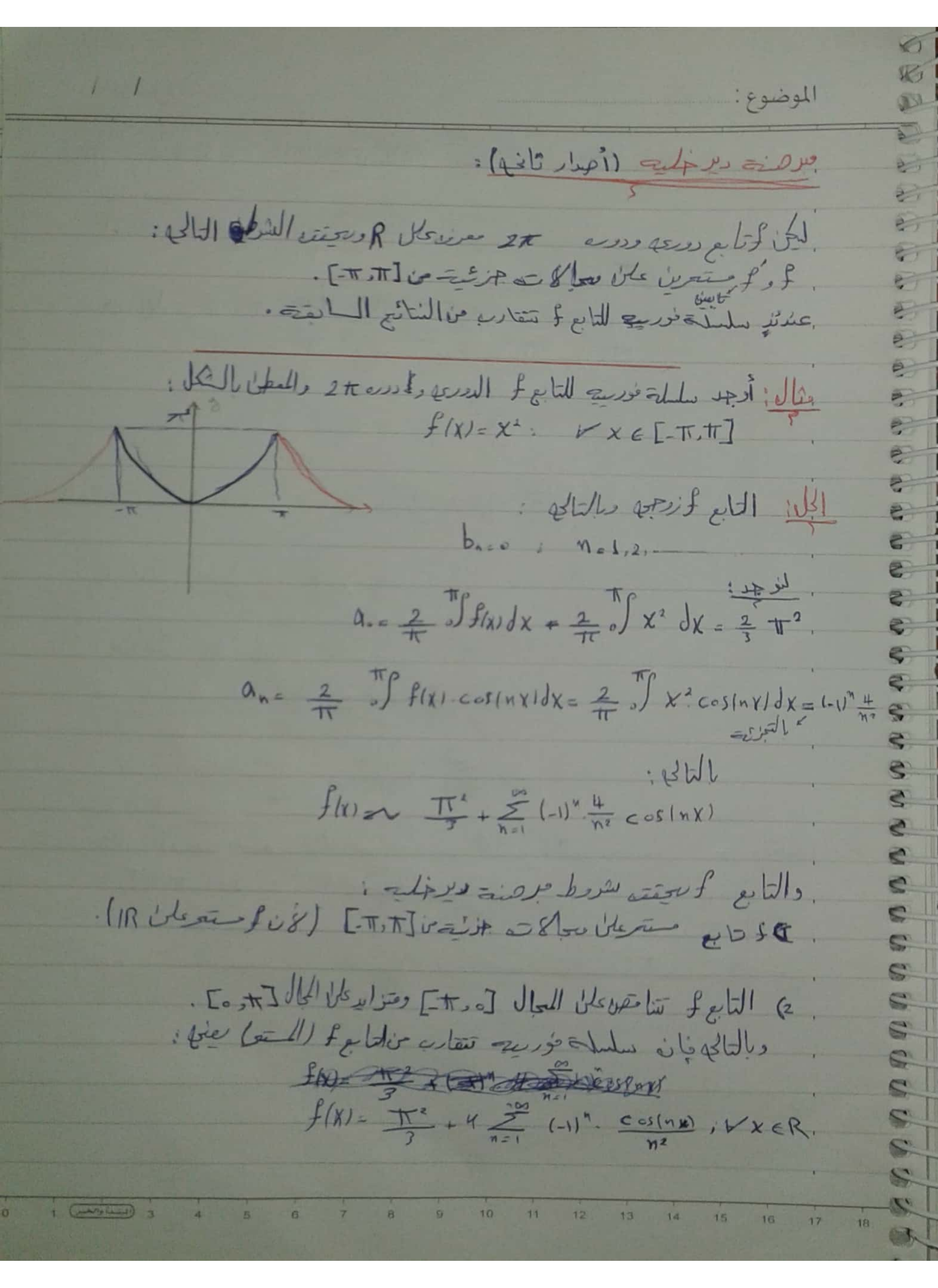
عندئذ، فإن سلسلة فورييه للتابع f تتقارب من:

① $f(x)$ من أجل النقاط b $x \in]-\pi, \pi[$ والتي يكون عندها التابع مستمر.

② $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ من أجل النقاط $x \in]-\pi, \pi[$ التي يكون عندها التابع غير مستمر.

نهاية من اليمين
نهاية من اليسار

③ $\frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2}$ عند أطراف المجال $x = \pm\pi$.



الموضوع :

مبرهنة ديرخليه (إصدار ثاني):

ليكن f تابع دوري ودوره 2π معرف على R ويحقق الشرط التالي:

f و f' مستمرين على مجالات جزئية من $[-\pi,\pi]$.

عندئذٍ سلسلة فورييه للتابع f تتقارب من النتائج السابقة.

مثال: أوجد سلسلة فورييه للتابع f الدوري والذي دوره 2π والمعطى بالشكل:

$$f(x) = x^2 \;;\; \forall x \in [-\pi,\pi]$$

الحل: التابع f زوجي وبالتالي:

$$b_n = 0 \;;\; n = 1,2,\dots$$

لنوجد:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = (-1)^n\frac{4}{n^2}$$

بالتجزئة

بالتالي:

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos(nx)$$

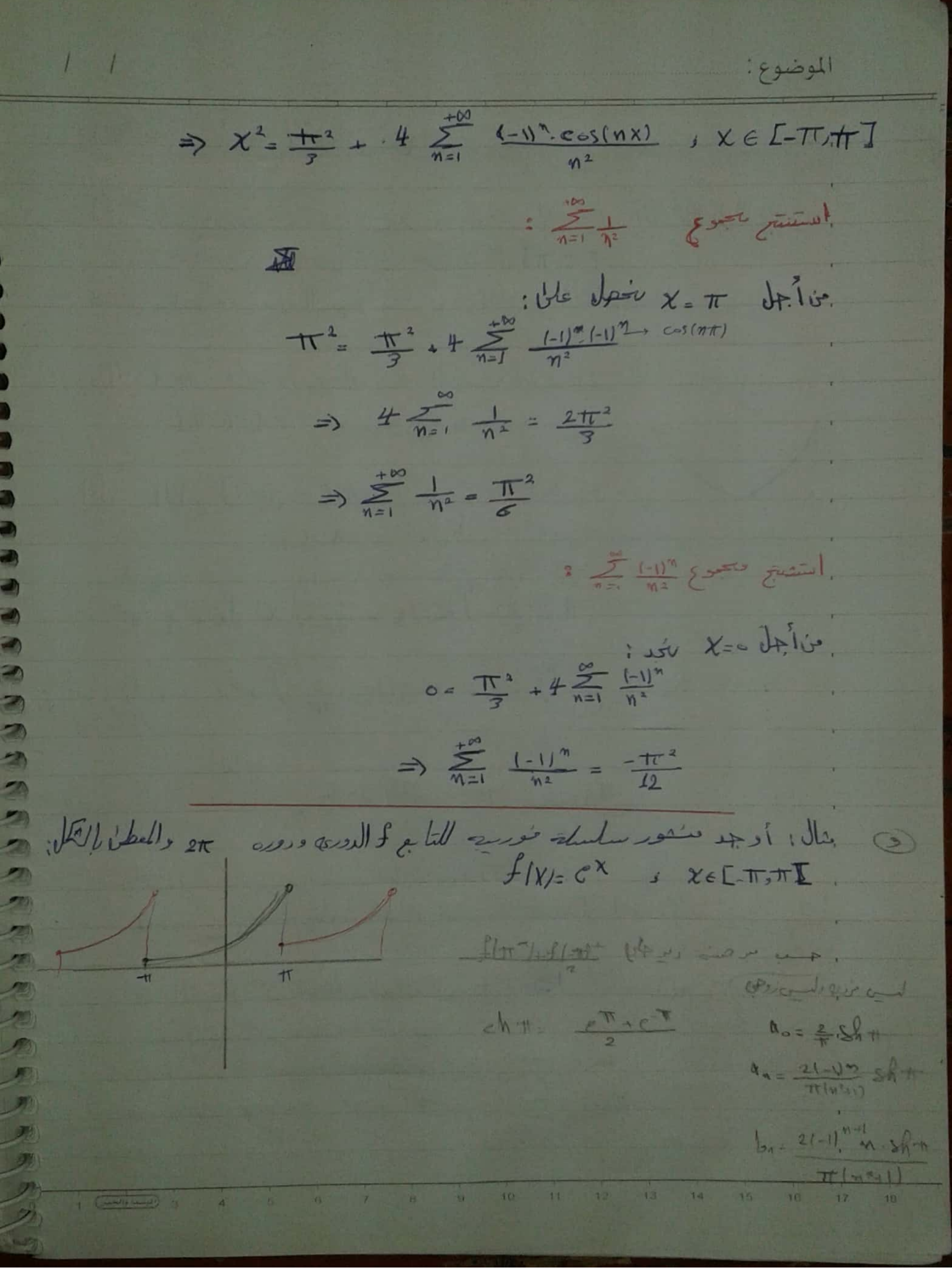
والتابع f يحقق شروط مبرهنة ديرخليه:

1. f تابع مستمر على مجالات جزئية من $[-\pi,\pi]$ (لأن f مستمر على IR).
2. التابع f متناقص على المجال $[-\pi,0]$ ومتزايد على المجال $[0,\pi]$.

وبالتالي فإن سلسلة فورييه تتقارب من التابع f (المستمر) يعني:

~~$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + (-1)^n \sum_{n=1}^{\infty} \dots$~~

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\cos(nx)}{n^2} \;;\; \forall x \in R.$$



$$\Rightarrow x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cos(nx)}{n^2} \quad ; \; x \in [-\pi, \pi]$$

استنتج المجموع $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$:

من أجل $x = \pi$ نحصل على:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{n^2} \quad (\cos(n\pi))$$

$$\Rightarrow 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

استنتج مجموع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$:

من أجل $x = 0$ نجد:

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$$

---

(3) مثال: أوجد منشور سلسلة فورييه للتابع f الدوري ودوره 2π والمعطى بالشكل:

$$f(x) = e^x \quad ; \; x \in [-\pi, \pi[$$

حسب مبرهنة ديريخليه $\frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2}$

ليس فردي وليس زوجي

$$ch\,\pi = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} sh\,\pi$$

$$a_n = \frac{2(-1)^n}{\pi(n^2+1)} sh\,\pi$$

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1} n \cdot sh\,\pi}{\pi(n^2+1)}$$